

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园

首页

新随笔

联系

订阅

管理

<

2022年3月

>

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力

欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的

园龄：4年7个月

粉丝：288

关注：5

+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动你的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔

我的评论

我的参与

最新评论

我的标签

积分与排名

积分 - 457097

排名 - 1198

单变量微积分笔记6——线性近似和二阶近似

线性近似

假设一般函数上存在点 $(x_0, f(x_0))$ ，当 x 接近基点 x_0 时，可以使用函数在 x_0 点的切线作为函数的近似线。函数 $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ 即称为函数 f 在 x_0 点的线性近似或切线近似。

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

公式来源

导数的定义：

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

左右两边同时乘以 $x - x_0$ ，并去掉极限符号：

$$f'(x) \cdot (x - x_0) \approx f(x) - f(x_0)$$

$$f(x) \approx f'(x)(x - x_0) + f(x_0)$$

在 $x \approx x_0 = 0$ 时

$$f(x) \approx f'(0)(x) + f(0)$$

几何意义

线性近似求解的是近似值，其几何意义是在基点的切线近似于原函数的曲线。

以 $f(x) = \ln x$ 为例，根据公式，在 $x_0 = 1$ ， $\ln x \approx x - 1$ ，曲线和切线如下图所示：

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

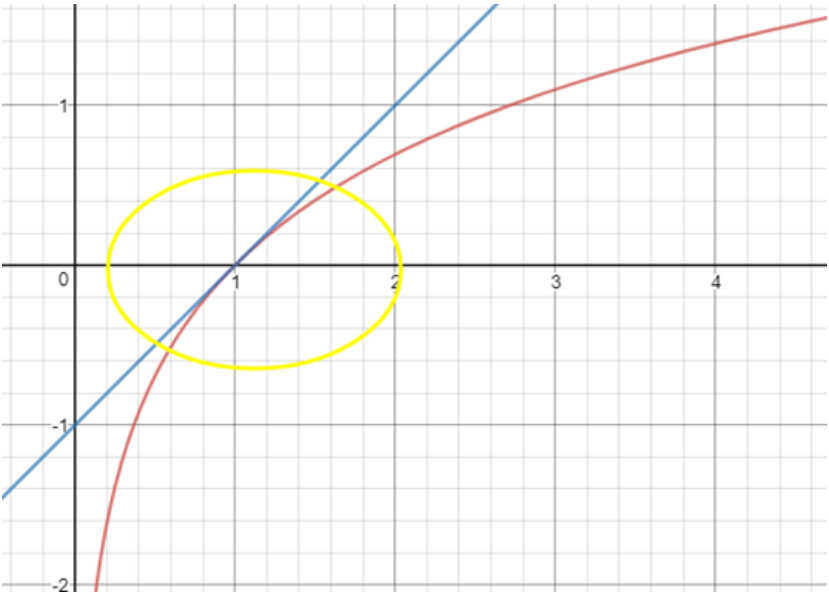
- 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0, 即夹角小于90°, 这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人



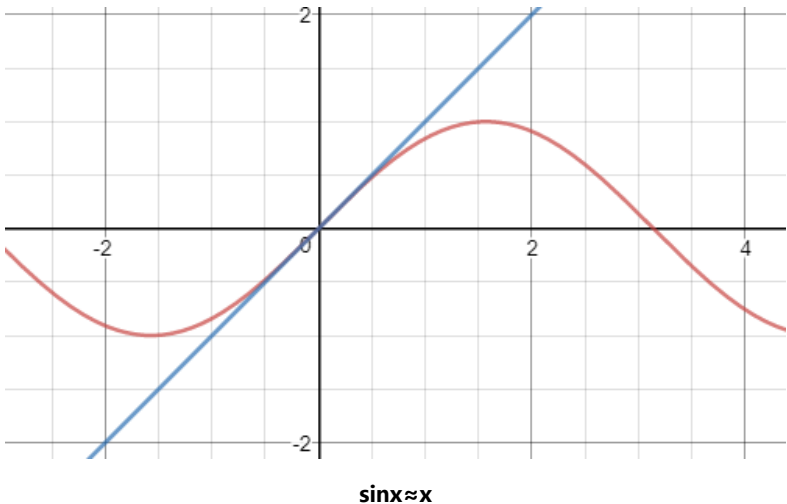
在 $x_0=1$ 点附近，曲线近似于直线， x 越接近 x_0 ，二者的近似度越高。在讨论近似时，只有指定基点才有意义。这很容易理解， x 越远离 x_0 ，曲线和直线的差距越大；同时，当基点不同时，切线的斜率也不同。

常用线性近似

$x_0=0$

	$f'(x)$	$f'(0)$	$f(0)$	$f(0)+f'(0)(x)$
$\sin x$	$\cos x$	1	0	x
$\cos x$	$-\sin x$	0	1	1
e^x	e^x	1	1	$1+x$
$\ln(1+x)$	$1/(1+x)$	1	0	x
$(1+x)^n$	$n(1+x)^{n-1}$	n	1	$1+nx$

以下是上述线性近似的几何意义：



2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

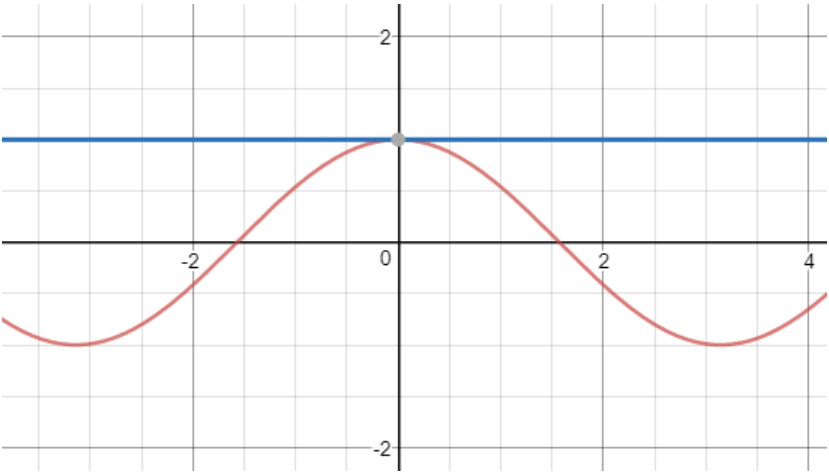
4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(A_t) 有些图片挂了呢

--ccchendada

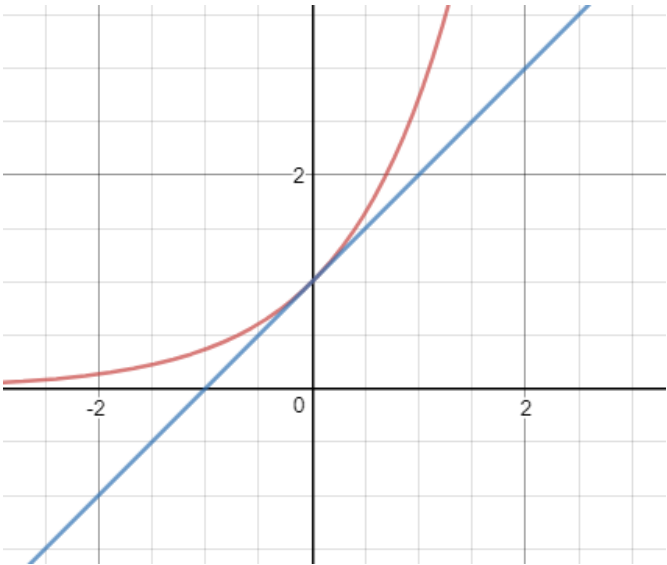
5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中 $v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

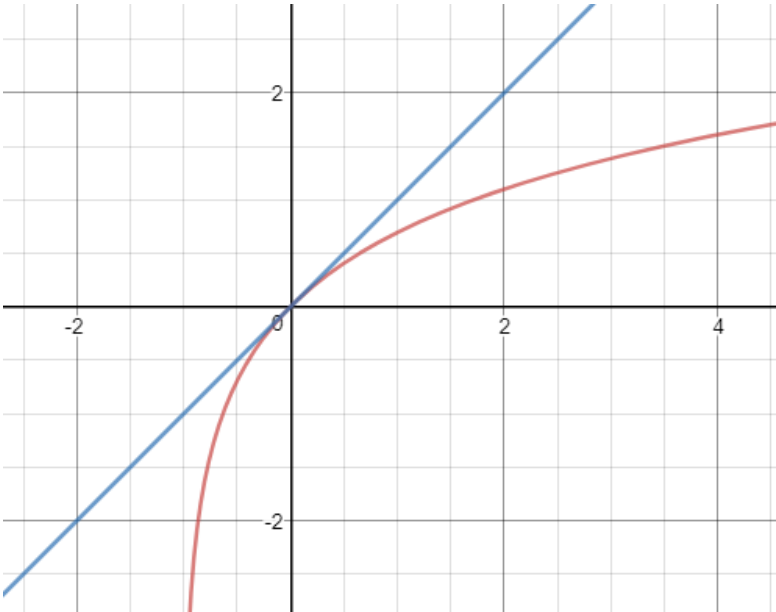
--trustInU



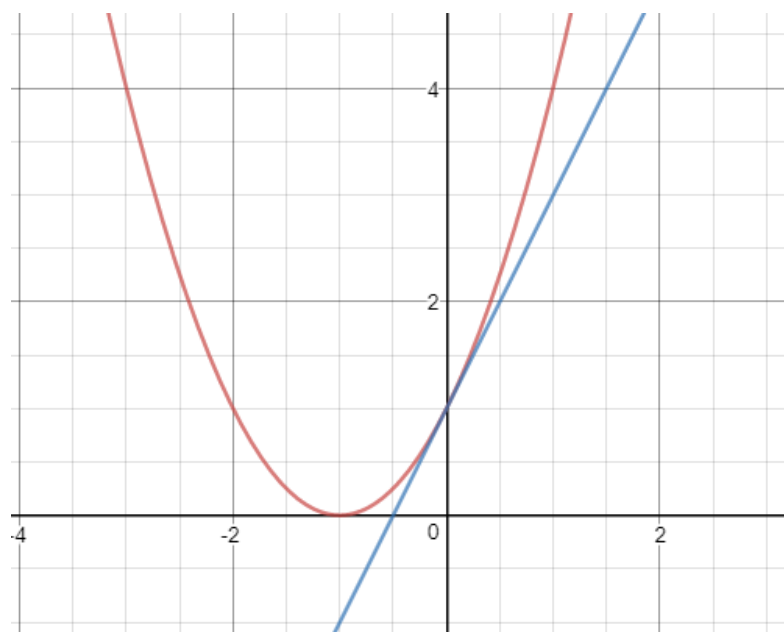
$\cos x \approx 1$



$e^x \approx x + 1$



$\ln(x+1) \approx x$



$$(1+x)^n \approx 1+nx, n=2$$

化繁为简

例1: $\ln(1.1) = ?$

这需要计算器了，但实际工作中往往只需要寻找近似值。

如果设 $x=0.1$ ，则 $\ln(1.1) = \ln(1+x)$ ，当 $x \approx 0$ 时， $\ln(1+x) \approx x$ ，在此，我们认为 0.1 接近于 0 ， $\ln(1.1) = \ln(1+x) \approx x = 0.1$

0.1 是否接近于 0 ，这是个及其主观的判断，要视具体问题而定。某些时候， 0.1 可能距离 0 很远，另一些时候， 10 也可能距离 0 很近。

例2: 在 $x \approx 0$ 时， $\frac{e^{-3x}}{\sqrt{1+x}} = ?$

这不需要计算器，直接将代入 $x=0$ 即可，结果为 1 。然而这种方法太过简陋，如果判断 $x=0.1 \approx 0$ ，就需要一个更精确的结果，不能直接将 0 代入。

还是使用线性近似的思路，首先需要把式子转换成我们认识的写法：

$$f(x) = \frac{e^{-3x}}{\sqrt{1+x}} = e^{-3x}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

当 $x \approx 0$ 时，根据公式 $f(x) \approx f'(0)(x) + f(0)$ ，重点是计算 $f'(0)$ ：

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{-3x})'(1+x)^{-\frac{1}{2}} + (e^{-3x})\left((1+x)^{-\frac{1}{2}}\right)' \\ &= -3e^{-3x}(1+x)^{-\frac{1}{2}} + (e^{-3x})\left(-\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}\right) \end{aligned}$$

$$f'(x)|_{x=0} = -3 - \frac{1}{2} = -\frac{7}{2}$$

$$f(x) \approx f'(0) \cdot (x) + f(0) = 1 - \frac{7x}{2}$$

对这个长长的式子求导非常麻烦，涉及到多个求导法则，我们希望用简单的方式求解。

对于本例来说，非常幸运，我们已经知道 $x \approx 0$ 时 $e^x \approx 1+x$, $x^n \approx 1+nx$ ，代入本例：

$$\begin{aligned}(e^{-3x})'(1+x)^{-\frac{1}{2}} &\approx (1-3x)\left(1-\frac{x}{2}\right) \\ &= 1 - \frac{x}{2} - 3x + \frac{3x^2}{2} \\ &= 1 - \frac{7x}{2} + \frac{3x^2}{2}\end{aligned}$$

当 $x \approx 0$ 时，高阶函数 $3x^2/2 \approx 0$ ，随着 $x \rightarrow 0$ ， $3x^2/2$ 更快地趋近于0，所以上式可舍弃高阶函数：

$$1 - \frac{7x}{2} + \frac{3x^2}{2} \approx 1 - \frac{7x}{2}$$

通过这两个例子可以看出线性近似的作用——化繁为简。等号左侧的式子是繁，比如 $\ln 1.1$ 和 $\frac{e^{-3x}}{\sqrt{1+x}}$ ，通过线性近似将其转化为简单的式子，0.1和 $1-7x/2$

在转换过程中当然会损失一些精度，但绝大多数时候我们都无需得到精确的解，例如在 $x=0.0001$ 的时候，原式的计算量相当大，化简后将极大地简化计算，而付出的代价相当少，几乎可以忽略；某些时候甚至根本无法得到精确解，比如无理数的计算。取而代之，我们求得可接受的近似解，通过近似解化繁为简。

化繁为简的思路也贯穿于整个数学，后续我们将看到，在求解复杂问题时，采取的方法几乎都是不断寻找近似、舍弃。

在利用计算机寻找最优解时，几个常用的算法是爬山法、模拟退火算法、遗传算法，这些算法都是采用化繁为简的思路，舍弃全局最优解，寻找可以接受的较好解，故每次得到的结果都会稍有偏差。

二阶近似

公式

当 $x \approx x_0$ 时

$$f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) + f''(x_0)(x - x_0)^2/2$$

当 $x \approx x_0=0$ 时

$$f(x) \approx f'(0)(x) + f(0) + f''(0)x^2/2$$

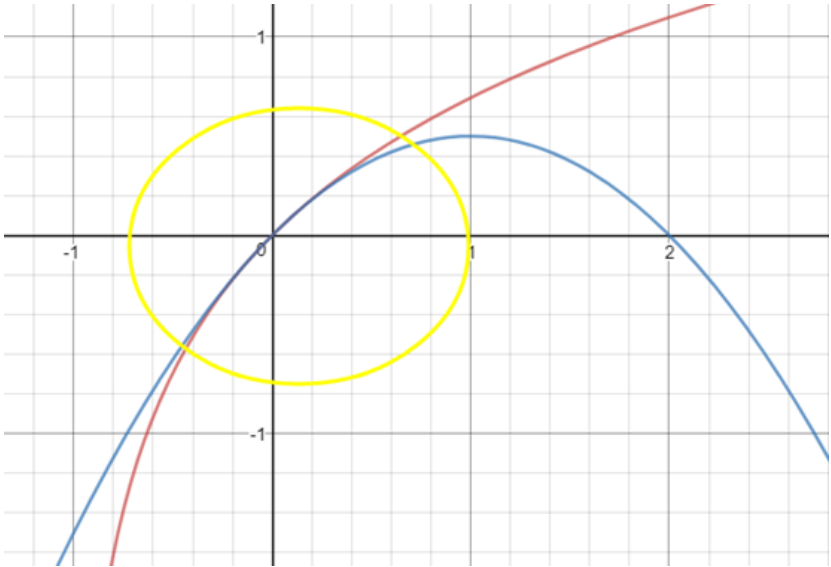
几何意义

二阶近似的几何意义是最接近原函数的抛物线，它比线性近似更为精确。

以 $f(x)=\ln(1+x)$ 为例，根据公式，在 $x_0=0$ ，

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$$

曲线如下：



$\ln(1+x) \approx x - x^2/2$

对比线性近似可以看出，二阶近似在基点附近更贴近原函数。

为什么会出现1/2

当 $x \approx x_0=0$ 时

$f(x) \approx f'(0)(x) + f(0) + f''(0)x^2/2$

为什么会出现1/2呢？

二级近似的几何意义是最接近曲线的抛物线，如果原曲线本身就是抛物线，则二阶近似就是原曲线本身。

原函数 $f(x) = a + bx + cx^2$

$f'(x) = b + 2cx$

$f''(x) = 2c$

当 $x = 0$ 时，

$f(0) = a, f'(0) = b, f''(0) = 2c$

二阶近似 $f(x) \approx a + bx + 2cx^2/2 = a + b + cx^2$

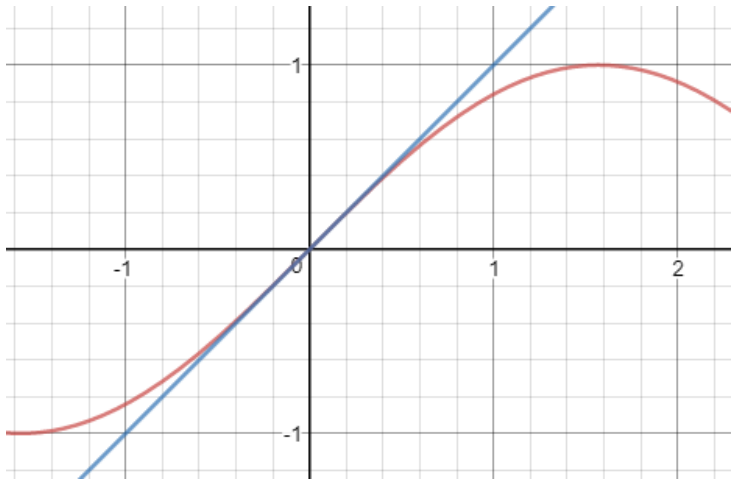
这就是出现1/2的原因，当然，仅当 $f(x) = a + bx + cx^2$ 时才能如此精确。

常用二阶近似

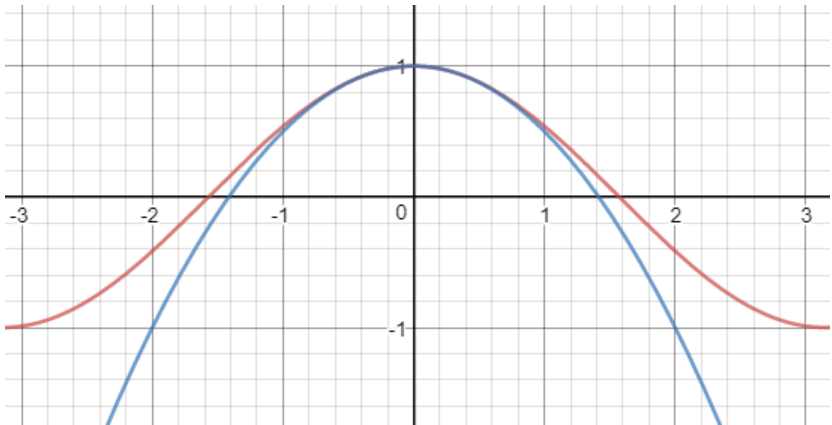
$x_0=0$

	$f'(x)$	$f(0)+f'(0)(x)$	$f''(x)$	$f''(0)$	$f(0)+f'(0)(x)+f''(0)x^2/2$
$\sin x$	$\cos x$	x	$-\sin x$	0	x
$\cos x$	$-\sin x$	1	$-\cos x$	-1	$1 - x^2/2$
e^x	e^x	$1+x$	e^x	1	$1+x+x^2/2$
$\ln(1+x)$	$1/(1+x)$	x	$-1/(1+x)^2$	-1	$x - x^2/2$
$(1+x)^n$	$n(1+x)^{n-1}$	$1+nx$	$n(n-1)(1+x)^{n-2}$	$n(n-1)$	$1+nx+n(n-1)x^2/2$

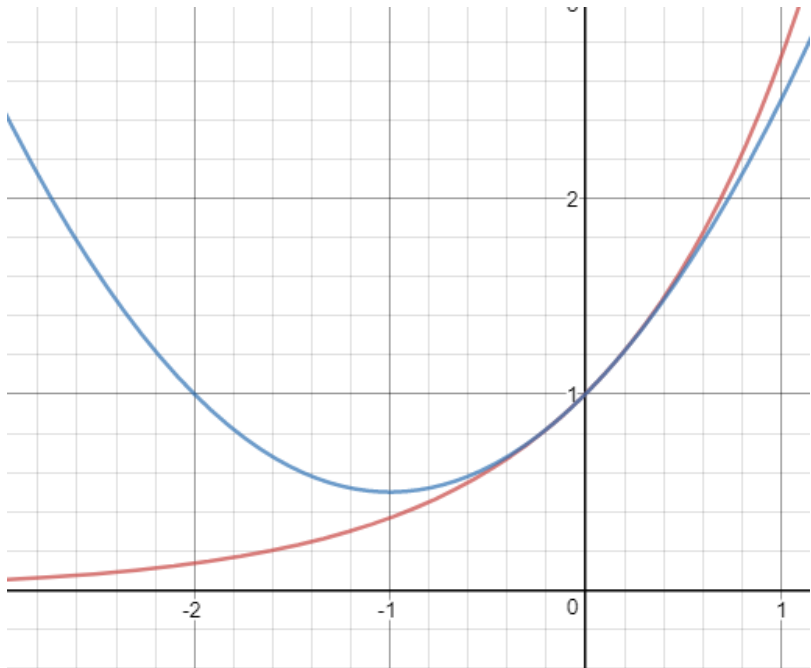
以下是上述线性近似的几何意义：



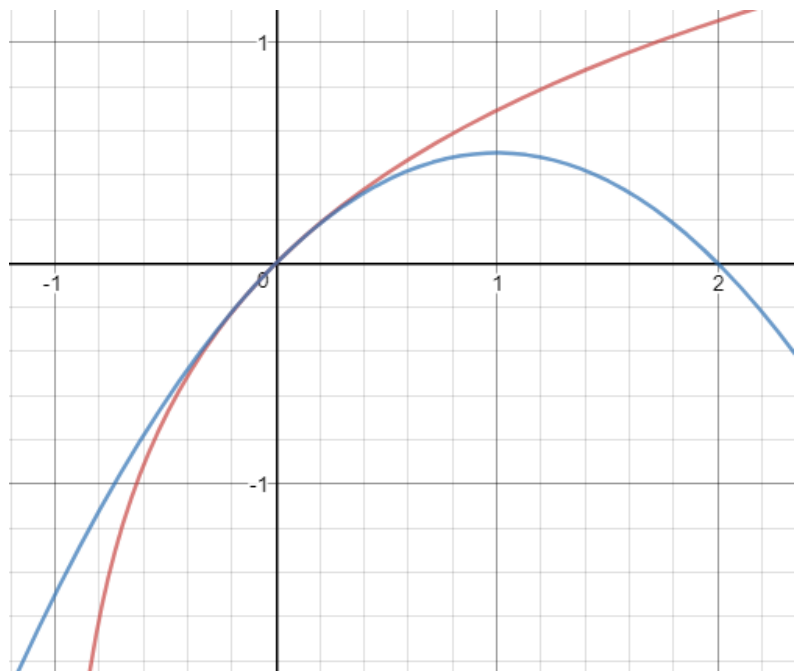
$\sin x \approx x$



$\cos x \approx 1 - x^2/2$



$e^x \approx 1 + x + x^2/2$



$$\ln(1+x) \approx x - x^2/2$$

示例

在 $x \approx 0$ 时, $e^{-3x}(1+x)^{-1/2} = ?$

根据 $e^x \approx 1+x+x^2/2$ 和 $(1+x)^n \approx 1+nx+n(n-1)x^2/2$

$$e^{-3x}(1+x)^{-1/2} \approx (1-3x+(-3x/2)^2)(1-x/2+(-1/2)(-3/2)x^2/2)$$

舍弃3阶和4阶函数, $e^{-3x}(1+x)^{-1/2} \approx 1-7x/2+51x^2/8$

总结

1. 线性近似, $f(x) \approx f'(x)(x-x_0) + f(x_0)$, $x \approx x_0=0$ 时, $f(x) \approx f'(0)(x) + f(0)$
2. 二阶近似, $f(x) \approx f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0) + f''(x_0)(x-x_0)^2/2$
当 $x \approx x_0=0$ 时, $f(x) \approx f'(0)(x) + f(0) + f''(0)x^2/2$
3. $x_0=0$, 常用线性近似:
 - 1) $\sin x \approx x$
 - 2) $\cos x \approx 1$
 - 3) $e^x \approx 1+x$
 - 4) $\ln(1+x) \approx x$
 - 5) $(1+x)^n \approx 1+nx$
4. $x_0=0$, 常用二阶近似:
 - 1) $\sin x \approx x$
 - 2) $\cos x \approx 1 - x^2/2$
 - 3) $e^x \approx 1+x+x^2/2$
 - 4) $\ln(1+x) \approx x - x^2/2$
 - 5) $(1+x)^n \approx 1+nx+n(n-1)x^2/2$

出处: 微信公众号 "我是8位的"

本文以学习、研究和分享为主, 如需转载, 请联系本人, 标明作者和出处, 非商业用途!

扫描二维码关注作者公众号 "我是8位的"



随笔

分类: [单变量微积分](#)

标签: [数学](#), [线性近似](#), [二阶近似](#)

好文要顶

关注我

收藏该文

我是8位的

关注 - 5

粉丝 - 288

+加关注

1

推荐

0

反对

« 上一篇: [单变量微积分笔记5——导数5 \(指数函数和对数函数的导数\)](#)

» 下一篇: [软件的社交能力](#)

posted on 2017-09-12 23:02 [我是8位的](#) 阅读(9149) 评论(0) [编辑](#) [收藏](#) [举报](#)

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

登录后才能查看或发表评论, 立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) [博客园首页](#)

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集, 分享最打动你的科技女性故事

【推荐】华为开发者专区, 与开发者一起构建万物互联的智能世界

广告 X

JAVA Office文档在线编辑APIs

简单易用的Word, Excel, PowerPoint在线编辑接口

cloud.e-iceblue.cn

打开

编辑推荐:

- 革命性创新, 动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计 (十二) —— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]: 内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

活动时间: 2022年3月8日-3月18日

最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档: 他缺乏工程师才能, 不得不锻炼营销能力来弥补
- 美国大厂码农薪资曝光: 年薪18万美元, 够养家, 不够买海景房
- 两张照片就能转视频! Google提出FLIM帧插值模型

- Android 再推 “杀手级” 功能，可回收 60% 存储空间
- 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:
博客园

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes